1 – дәріс. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар.

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Анықтамалар. Жалпы, дербес және ерекше шешімдер

Анықтамалар:

1. Ізделінді функцияны, оның туындылары мен дифференциалдарын және аргументтерін байланыстыратын теңдеуді дифференциалдық теңдеу деп айтамыз.

2. Теңдеуге кіретін туындының не дифференциалдың ең жоғарғы ретін дифференциалдық теңдеудің реті деп атаймыз.

3. Дифференциалдық теңдеудің шешімі деп кез келген функцияны айтамыз, егер оның өзін, туындысын және дифференциалын теңдеуге қойғанда тепе-теңдік шығатын болса.

4. Тек қана бір айнымалыға (бірнеше айнымалыға) тәуелді дифференциалдық теңдеуді қарапайым (дербес туындылы) дифференциалдық теңдеулер деп айтамыз.

Мысал 1.

а) $\dfrac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x;y)}{\partial y^2}=f(x;y)$ - екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу;

б) $y'''(x)-xy^2(x)=3$ - үшінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу;

в) $xdx-ydy=0$ - бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу.

Ескерту 1. Ары қарай дифференциалдық теңдеу дегенді қарапайым дифференциалдық теңдеу деп түсінеміз.

Мысал 2. Теңдеудің жалпы шешімін тап

а) $y'=2x \Rightarrow \int y'dx=\int 2xdx \Rightarrow$

$$y=x^2+C \tag{1}$$

(1) шешімі кез келген C тұрақтысына байланысты, яғни, C-ның әртүрлі мәнінде әртүрлі шешім аламыз. Енді C тұрақтысын анықтау үшін қосымша бір шарт (бастапқы шарт) берелік: $y(1)=2$.

Онда осы бастапқы шартты (1)-ге қойсақ: $2=1^2+C \Rightarrow C=1 \Rightarrow y=x^2+1$ - дербес шешім.

б) $y''=2 \Rightarrow \int (y')'dx=\int 2dx \Rightarrow y'=2x+C_1 \Rightarrow \int y'dx=\int (2x+C_1)dx \Rightarrow$

$$y=x^2+C_1x+C_2 \text{ - жалпы шешім.} \tag{2}$$

Екінші ретті (2) теңдеуі екі тұрақтыға байланысты C_1 және C_2, оларды анықтау үшін екі шарт (бастапқы) қажет: $y(0)=1,\ y'(0)=2$. Бұдан:

$$\begin{cases} y=x^2+C_1x+C_2 \\ y'=2x+C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=C_2 \\ 2=C_1 \end{cases} \Rightarrow \quad y=x^2+2x+1 \text{- дербес шешім.}$$

Геометриялық тұрғыдан, (1) және (2) шешімдері – параболалар жиынтығы. Бастапқы шарт берілді деген: осы параболалар жиынтығынан мына шарттарды қанағаттандыратын параболаны тап деген сөз:

а) $M(1;2)$ нүктесі арқылы өтетін; б) $M(0;1)$ нүктесі арқылы өтетін және $x=0$ нүктесінде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффиценті $k=y'(0)=2$ болатын.

2 Коши теоремасы. Жалпы және дербес шешім

$n-$ші ретті айқын дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$y^{(n)}=f(x;y;y';...;y^{(n-1)}), \tag{3}$$

ал айқын емес $n-$ші ретті дифференциалдық теңдеу: $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$.

Коши есебі. (3) дифференциалдық теңдеуінің, $x=x_0$ болғанда

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}{}_0 \tag{4}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімдерін тап.

Коши теоремасы. Егер қандай да бір тұйық облыста $f(x;y;y',...,y^{(n-1)})$ функциясы барлық аргументі бойынша үзіліссіз болып және осы облыста оның дербес туындылары $f'_y,\ f'_{y'},...,\ f'_{y^{(n-1)}}$ табылса, онда (3) дифференциалдық теңдеуінің (4) бастапқы шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі болады, мұндағы $(x_0; y_0)$ нүктесі - осы облысқа тиісті нүкте.